Opakování: (M,ρ) MP, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$

- je cauchyovská, pokud

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall m,n \geq n_0 : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

- M je úplný, pokud každá cauchyovská posl. v M konverguje (tj. má limitu v M).

Příklad 27: Prostor $(C([0,1]), d_\infty)$ je úplný.

Postup Dk: Buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská.

- $\forall x \in [0,1]$: $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská
- $\Rightarrow \exists\ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x \in [0,1])$.
- Ukázali jsme:

1) $f \in C([0,1])$

2) $d_\infty(f_n, f) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Celkem: $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní. ☒

Úplnost a základní operace s MP

Věta 28: (Cantorův princip) Buď (M,ρ) MP. (M,ρ) je úplný $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\text{pro každou posloupnost uz. množin } \{F_n\}_{n=1}^{\infty},\ F_n \subseteq M \text{ splňující: } \bullet\ F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \dots \quad \bullet\ \operatorname{diam} F_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ platí } \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset.}$

Důkaz: nechť M je úplný.

nechť $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ splňuje předpoklady.

Chceme: $\bigcap_{n=1}^\infty F_n \neq \emptyset$. Vybereme prvky

$x_n \in F_n$, $n \in \mathbb{N}$ libovolně. Máme tedy $\{x_n\}_{n=1}^\infty$.

- je cauchy.: Dáno $\varepsilon > 0$. Najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$: $\operatorname{diam} F_n < \varepsilon$. Pak

$\forall n, m \geq n_0$: $x_n \in F_n \subseteq F_{n_0}$

$x_m \in F_m \subseteq F_{n_0}$

Tj. $x_n, x_m \in F_{n_0}$, ale $\operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$.

To znamená $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

- Tedy existuje $x \in M$: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
- Tvrdím: $x \in \bigcap_{n=1}^\infty F_n$.

nechť je dán index $m \in \mathbb{N}$.

Pak $\forall n \geq m$: $x_n \in F_m$.

Ale F_m je uzavřená, a tedy $\lim x_n \in F_m$.

Tedy celkem: $\forall m \in \mathbb{N}$: $x \in F_m$, tj. $x \in \bigcap_{m=1}^\infty F_m$.

($\Leftarrow$) nechť platí podmínka věty.

Buď $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq M$ cauchyovská.

Chceme: je konvergentní.

Položme: $F_n = \overline{\{x_i : i \geq n\}}$.

Zřejmě: $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \dots$

Chci: $\operatorname{diam} F_n \to 0$. Protože $\{x_n\}$ je cauchy., pro dané $\varepsilon > 0$ $\exists n_0$:

$\operatorname{diam} \{x_i : i \geq n_0\} \leq \varepsilon$, a tedy

i $\operatorname{diam} \{x_i : i \geq n\} \leq \varepsilon$ pro $n \geq n_0$.

Uzávěry tyto nerovnosti nezkazí.

Cv.: $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \overline{A}$.

Tedy $\operatorname{diam} F_n \to 0$. Tedy podle předp. existuje $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

Ukážeme, že $x = \lim x_n$: Dáno $\varepsilon > 0$

Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$: $\operatorname{diam} F_{n_0} < \frac{\varepsilon}{3}$.

$F_{n_0} = \overline{\{x_i : i \geq n_0\}}$. Pro libovolné $n \geq n_0$:

$\rho(x_n, x) \leq \operatorname{diam} F_n \leq \operatorname{diam} F_{n_0} < \frac{\varepsilon}{3}$.

Tedy $x_n \to x$. $\boxtimes$

Věta 29: (úplnost a podprostory) Buď (M, ρ) MP, $N \subseteq M$ podprostor. Pak

(N, ρ) je úplný $\iff$ N je uz. v M.

Důkaz: ($\Rightarrow$) Kdyby N nebyla uz. v M., existovala by (Cv.) posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq N$, že $\lim x_n \in M \setminus N$. Ale, protože $\{x_n\}$ je konv. v M, je cauchy. v M, a tedy i v N. nemá ale v N limitu, a tak N není úplný.

($\Leftarrow$) nechť $N \subseteq M$ je uzavřená v M. nechť $\{x_n\}$ je cauchy. v N.

$\Rightarrow$ je cauchy. v M.

$\Rightarrow$ (M je úplný) $\exists x \in M$: $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

ale N je uz., takže $x \in N$. $\boxtimes$

Cv. ($\Leftarrow$) pomocí V28.

Věta 30 (úplnost a součin)

nechť (M_i, ρ_i), $i \in \mathbb{N}$ jsou MP,

$\forall i \in \mathbb{N}$: $\operatorname{diam} M_i \leq 1$. Pak

$\prod_{i=1}^{\infty} (M_i, \rho_i)$ je úplný $\Longleftrightarrow$ $\forall i$: (M_i, ρ_i) je úplný.

Důkaz: $(\Rightarrow)$ $(M_i, \frac{\rho_i}{2^i})$ lze chápat jako

podprostor součinu $\prod_{i=1}^{\infty} (M_i, \rho_i)$.

Cv.: Jde o uzavřený podprostor $\overset{V29}{\Longrightarrow}$ (M_i, ρ_i) je úplný.

$(\Leftarrow)$ nechť $\{x_n\} \subseteq \prod_{i=1}^{\infty} (M_i, \rho_i) = (M, \rho)$

je cauchy. $x_n(i) \in M_i$. Tvrdím, že $\forall i_0 \in \mathbb{N}$:

$\{x_n(i_0)\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská.

Dáno $\varepsilon > 0$. najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall m, n \geq n_0$:

$\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2^{i_0}}$.

$$\rho(x_n, x_m) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i(x_n(i), x_m(i))}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2^{i_0}}$$

$$\frac{\rho_{i_0}(x_n(i_0), x_m(i_0))}{2^{i_0}} < \qquad < \frac{\varepsilon}{2^{i_0}}.$$

Tedy $\rho_{i_0}(x_n(i_0), x_m(i_0)) < \varepsilon$.

Tedy existuje limita $x(i_0) := \lim_{n \to \infty} x_n(i_0)$.

Tj. $x \in \prod_{i=1}^{\infty} (M_i, \rho_i)$.

Chceme: $\rho(x_n, x) \to 0$. Cvičení

na standardní myšlenku se zanedbatelností „vocasu řady".

$\boxtimes$

Pozn.: úplnost a suma prostorů

$$\sum_{\alpha\in I}(M_\alpha,\rho_\alpha) \text{ je úplná} \iff \forall \alpha\in I: (M_\alpha,\rho_\alpha) \text{ je úplný.}$$

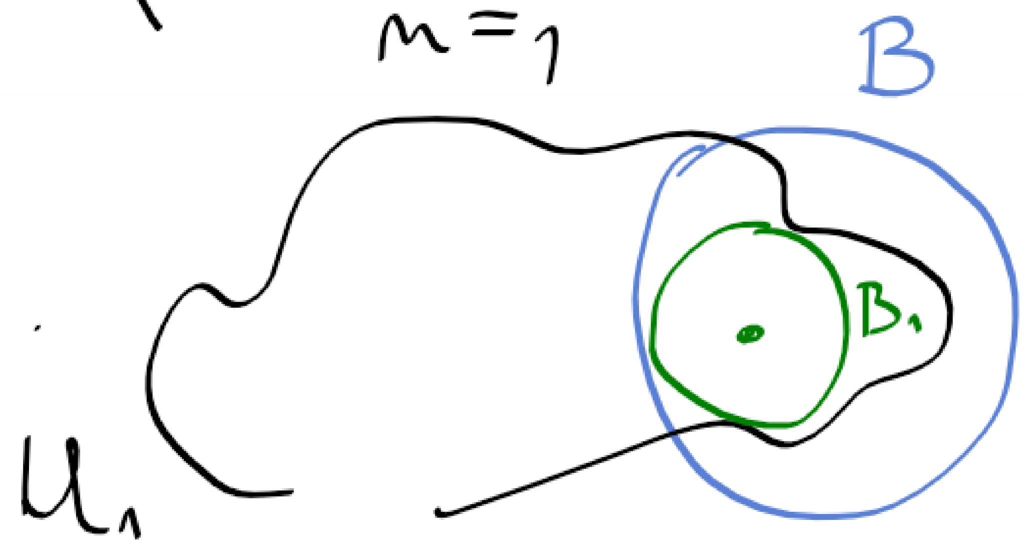
BAIREOVA VĚTA

Připomeň: (M,ρ) MP., $A\subseteq M$ je hustá $\overset{def}{\iff}$ $\overline{A}=M \iff A$ protíná každou kouli $\iff A$ protíná každou ot. mn.

Věta 31 (Baireova V.) Nechť (M,ρ) je úplný MP. Nechť U_n je otevřená, hustá podmnožina M, $n\in\mathbb{N}$. Pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ je hustá.

Příklad: $(\mathbb{Q},\rho_e)$: uspořádejme $\mathbb{Q}$ do posl. $\{q_n\}$ a označme $U_n := \mathbb{Q}\setminus\{q_n\}$. Pak U_n jsou ot. a husté v $\mathbb{Q}$ (Univ.). Přitom

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}\setminus\{q_n\} = \mathbb{Q}\setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}\{q_n\} = \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Q} = \emptyset.$$



Důkaz: Stačí: $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ protíná libovolnou kouli.

Dáno x, ε, $B := B(x,\varepsilon)$.

Protože U_1 je hustá, existuje $x_1\in U_1\cap B$.

Ale U_1 i B jsou ot., takže i $U_1\cap B$ je ot.,

takže existuje $\varepsilon_1>0$, že $B(x_1,2\varepsilon_1)\subseteq U_1\cap B$.

(Tím pádem $\overline{B(x_1,\varepsilon_1)} \subseteq U_1\cap B$.)

2. krok: U_2 je hustá, tj. $\exists\, x_2\in U_2\cap B(x_1,\varepsilon_1)$

Ale $U_2\cap B(x_1,\varepsilon_1)$ je ot., $\exists\, \varepsilon_2>0$, že

$B(x_2,2\varepsilon_2)\subseteq$ (tedy $\overline{B(x_2,\varepsilon_2)} \subseteq U_2\cap B(x_1,\varepsilon_1)$)

Indukcí (rekurzí) vybereme posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$, $\{\varepsilon_n\} \subseteq (0,\infty)$ splňující:

- $\varepsilon_n \leq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$
- $\underbrace{B(x_n,\varepsilon_n)}_{B_n} \subseteq U_n$, $n \in \mathbb{N}$
- $B(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subseteq B(x_n, \varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Nechť je konstrukce hotova až po n.
U_{n+1} je hustá otevřená, protíná $B(x_n,\varepsilon_n)$.
Najdeme $x_{n+1} \in B(x_n,\varepsilon_n) \cap U_{n+1}$,
$\varepsilon_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$, že $B(x_{n+1}, 2\varepsilon_{n+1}) \subseteq$.

Podle Cantorova principu $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$

Ale $B_n \subseteq U_n$, $B_n \subseteq B$. Celkem

$\emptyset \neq \bigcap B_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \cap B$. Jsme hotovi. ☒

Důsledek: Existuje spojitá funkce, která nemá nikde derivaci

Definice: I množina
$\ell_\infty(I) = \{f : I \to \mathbb{R} : \text{ je omezená}\}$
$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in I} |f(x) - g(x)|$.

(I nemá strukturu.)

Tvrzení: (ℓ_∞, d_∞) je úplný.

Podobně jako dříve.

Věta: Nechť (M,ρ) je MP, $\overline{D} = M$.
Pak existuje $\varphi : (M,\rho) \to \ell_\infty(D)$ izometrie.
Tj. (M,ρ) se dá chápat jako podprostor $\ell_\infty(D)$ | M sep. $\Rightarrow$ „$M \subset \ell_\infty(\mathbb{N})$“